La geometría: una herramienta para la enseñanza del proceso deductivo

Raquel Serna Pichat, Jasmina Yao Serna, Amelia Yao Serna, Pablo Yao Serna
snapitor@teleline.es

Introducción

Si tenemos en cuenta que en el desarrollo de las matemáticas a través del tiempo, la geometría es quizás la parte de las matemáticas que se abordó primero, deberíamos asimismo, pensar que en el desarrollo de un/a niño/a, la geometría debería tener mucho más importancia de la que se le da actualmente.

La geometría es una parte de las matemáticas que en la enseñanza ha quedado relegada a un lugar que no se merece. ¿Por qué?

Desde la edad preescolar en que los niños/as ya pueden identificar y diferenciar formas, aprendiendo a dibujarlas, jugando con ellas, familiarizándose con las figuras geométricas más simples, relacionándolas con objetos de su entorno, etc..., pasando a otros niveles como son los de trabajar en el plano y posteriormente en el espacio, ayudaría a fomentar el desarrollo de la visión espacial y el paso progresivo de la realidad más inmediata, comprensible matemáticamente, hasta la abstracción tan necesaria y abandonada en aras de una utilidad "práctica" que la sociedad actual requiere, despreciando la abstracción.

Proceso deductivo

Creo que la enseñanza de la geometría tiene otra aplicación, muy interesante, que me ha llamado poderosamente la atención, y es la enseñanza del proceso deductivo a través de la geometría: es una herramienta para enseñar, sin necesidad de álgebra ni otras partes de las

matemáticas, que ya se introducen en cursos más avanzados, a deducir desde edades muy tempranas.
Se debería iniciar a los niños en la geometría desde muy pequeños, y mantenerla durante toda la enseñanza reglada en un lugar destacado. Los niños de 10-11 años, ya tienen capacidad para empezar a trabajar del siguiente modo, que se puede repetir ampliando tanto en contenido como en dificultad con el paso de los cursos.
Se debería introducir las reglas de la geometría paulatinamente, siempre trabajando con ellas del siguiente modo:

a) Con la participación activa de los alumnos/as, la clase debe llegar a obtener las reglas, poco a poco.
b) Tras este paso, en el que es muy importante que todos los alumnos/as, hayan comprendido la perfección de las reglas que se consideren necesarias, es importante que las memoricen correctamente.
c) Y, posteriormente, se les plantea problemas que a lo largo del curso crecerán gradualmente en el nivel de dificultad, para que los alumnos aprendan a leer un problema, a interpretarlo, a ayudarse de esquemas y similares, que imaginen, y a plantear las hipótesis, sacando la información del enunciado.

Tras este paso, el alumno deberá, en base a las hipótesis dadas, una vez realizado el dibujo, demostrar algo, sin utilizar ningún útil del tipo: cartabón, escuadra, transportador, etc., sólo con las reglas que previamente habrá obtenido él mismo, comprendido y memorizado. De esta manera, la/el riña/o, deberá argumentar y fundamentar cada uno de los pasos intermedios que da para llegar a una conclusión, que es precisamente la que pedimos que demuestre. De este modo se ejercita la redacción y el tránsito gradual al formalismo matemático; se la proporciona al alumno las herramientas para poder por sí mismo llegar a una conclusión, debatirla y defenderla.
Se le da la posibilidad de ejercitar la imaginación. También se fomenta el aprendizaje del proceso lógico en la resolución de problemas, la observación, la deducción y todo ello desde muy pronto, ya que no se requieren herramientas matemáticas ni conceptos matemáticos complicados. Este proceso, entre otras osas, motiva al alumno, porque le da seguridad al ver su capacidad de manejar conocimientos, y adquiera confianza en sí mismo de manera que las matemáticas y las ciencias en general no le parecerán tan inalcanzables, tan irreales e imposibles de entender.
El desarrollo de todas estas aptitudes debe fomentarse durante toda la etapa escolar, y no como una asignatura aparte (e inconexa de las demás). Todas estas habilidades no se generan por generación espontánea, salvo casos excepcionales y aún en esos casos estoy segura de que se fomentaron de alguna forma.
Es muy importante que, con el paso de los años, el alumno trabaje todas estas facetas, de manera que este método vaya reforzándose. Es decir, la etapa escolar no debe ser meramente una fuente de información y embuche de datos inconexos sin pasar po la comprensión y coherencia entre todas las materias y entre los profesores que las imparten. El niño adquirirá, además de los importantes conocimientos en geometría tan necesarios para la física, la química, las matemáticas y otras ciencias, unas habilidades que le servirán en cualquier ámbito, tanto a nivel personal como profesional. El niño aprenderá a resolver problemas de manera lógica y razonada desde muy pronto, que le serán también de gran utilidad en su vida futura como estudiante.

Además, es aconsejable que trabajen la memoria consultando las reglas en el cuaderno el menor número de veces posible, de manera que lo que previamente hayan memorizado, se vaya asentando y madurando en la mente, formándose las conexiones necesarias para que saquen el mayor rendimiento posible a sus propias posibilidades. De este modo tomarán conciencia poco a poco de la importancia que tiene el conocimiento y la comprensión de la teoría y de la necesidad de trabajar los conceptos diariamente, y no un día antes del examen.

Para que los conocimientos se vayan asentando correctamente es muy importante la memorización (previa comprensión) de los conceptos recurriendo habitualmente a la memoria para la resolución de problemas.

La geometría se trabaja exhaustivamente en algunos países y sería interesante estudiar con detenimiento los resultados obtenidos por los alumnos, mediante el desarrollo enumerado anteriormente, al terminar su etapa escolar.

Y como anotación final, no hay más que ver a los niños como pueden disfrutar con un juego de mesa, en el que, conociendo las reglas de éste, son capaces de pensar, conectar esas reglas para poder sacarle el mayor rendimiento en las condiciones en que se encuentran al iniciar la partida, poder conseguir su objetivo y ganar. Y eso ya se observa en niños de 4, 5 y 6 años.

A continuación, presento algunos problemas de diferentes niveles que pueden ilustrar mejor lo que hasta ahora he explicado.

Ejercicios

Ejercicio 1 (1º de ESO)

El triángulo KLM, tiene una altura [KS], D_1 es la mediatriz de [LM] y corta a [KM] en R. Demuestra que [KS] son paralelas.

Nota: la solución debe contener en cada párrafo:

1) *Hipótesis* (sabemos que: enunciado, resultado ya encontrado)
2) Como: *regla general* (definición, una propiedad, un cálculo.
3) Por tanto: *conclusión*

Solución: [KS] es la altura del triángulo KLM, y como en un triángulo, la altura es un segmento que parte de un vértice, y es perpendicular al lado opuesto, entonces: [KS] y [LM] son perpendiculares.

D_1 es la mediatriz de [LM], y como la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a este segmento y que pasa por su mitad, per tanto D_1 y [LM] son perpendiculares.

[KS] y D1 son las dos perpendiculares a [LM], y sabemos que si dos rectas son perpendiculares a una tercera, entonces, esas dos rectas son paralelas entre ellas. Por tanto, [KS] y D_1 son paralelas.

Problema 1 (2º de ESO)

Sea un triángulo (RST). D es un punto de [RS] y U es el simétrico de T relativo a D. La paralela a [RS] pasando por D, corta a [UR] en F. Demuestra que F es el punto medio de [UR].

Solución: Por hipótesis, U es simétrico de T con respecto a D.

Regla: Dos puntos A y A' son simétricos con respecto a O, si O es el punto medio del segmento [AA'].

Por tanto, D es el punto medio de [TU].

Consideremos el triángulo RUT tiene una recta (DF) que pasa por el punto medio de [TU] y es paralelo a (RT).

Regla: En un triángulo, si una recta (DF) pasa por el punto medio de [TU] y es paralela a otro lado entonces corta al tercer lado en su punto medio. Por lo tanto, F es el punto medio de [RU].

Problema 2 (2º de ESO)

Sea OMN un triángulo isósceles de vértice O. Trazamos una recta (d) que pasa por = y que no pasa por N. Tomamos los puntos A y B de esta recta, tal que OA = OB = OM.

a. Dibuja la figura.
b. ¿Por qué el triángulo ABN es rectángulo?

Hipótesis: OMN = triángulo isósceles en O

OA = OB = OM

Solución: Por hipótesis, tres puntos alineados que cumplen que OA = OB, demuestra que O es el punto medio del segmento [AB].

En el triángulo ABN, [ON] une un vértice con el punto medio de [AB].

Regla: En un triángulo, si un segmento une un vértice al punto medio del lado opuesto, entonces este segmento es una mediana.

Por tanto, [ON] es la mediana relativa a [AB].

Por hipótesis, sabemos que OA = OB = OM.

Regla: un triángulo isósceles es un triángulo con 2 lados isométricos. Por tanto, como OM = ON, y OA = OB = OM = ON, tenemos que

ON = AB/2

Regla: si en un triángulo, una mediana mide la mitad de su correspondiente, entonces, este triángulo es rectángulo. Por tanto, ABN es triángulo rectángulo en N.

Problema 3 (2º de ESO)

1) Construye el segmento [EF] simétrico del segmento [AB] respecto a la recta D.
2) La recta (AB) corta a D en 0; jusfifica que la recta (EF) pasa también por 0.
3) Justifica la naturaleza del triángulo BOF.
4) Justifica que [EA] y [BF] son paralelas.
5) Sea [RS] el simétrico de [EF] respecto a 0, traza [RS].
6) Justifica que los puntos E, F, O, R y S están alineados.
7) Justifica que AB = RS
8) Justifica que 0 es un punto de la mediatriz de [BS].
9) Justifica la naturaleza del triángulo AOR.

Solución:

2) Por hipótesis, los segmentos [EF] y [AB] son simétricos respecto a D, por tanto (EF) y (AB) son simétricos respecto a D. Además, (AB) corta a D en O.

Regla: si 2 rectas son simétricas respecto a una recta D, entonces son secantes sobre D.

Deducción y conclusión: por tanto, (AB) y (EF) son secantes sobre D, en 0. Por tanto, (EF) pasa por O.

3) Situación:

Respecto a la recta D:

simétrico B = F (por hipótesis)
simétrico O = O (ya que O es un punto de D)
entonces, simétrico de [BO] = [FO]

Regla: Dos segmentos simétricos respecto a una recta son isométricos.

Deducción: por tanto, OB = OF

Situación:

El triángulo BOF tiene, por tanto, 2 lados iguales (OB = OF).
Regla: un triángulo que tiene 2 lados isométricos es isósceles.
Conclusión: por tanto, el triángulo BOF es isósceles en O.

4) Por hipótesis, [AB] y [EF] son simétricos respecto a D, por tanto simétrico de A = E y simétrico de B = F. Esto significa que D es la mediatriz de [AE] y de [BF].

La mediatriz de un segmento es perpendicular a este segmento en su punto medio; entonces, [AE] y [BF] son perpendiculares a D.

Como 2 segmentos son perpendiculares a una misma recta, son paralelos entre ellos; entonces, [AE] y [BF] son paralelos.

6) Por hipótesis, con respecto a O: simétrico de E es R, y simétrico de F es S.

Por otro lado, según el apartado 2), (EF) corta a D en O, por tanto, los puntos E, F y O están alineados *(1)*.

Como la simetría respecto a un punto conserva la alineación, entonces, R, S y O están alineados *(2)*.

7) Respecto a D: sabemos que simétrico [AB] = [EF]. Si 2 segmentos simétricos respecto a una recta son simétricos, entonces, AB = EF *(4)*.

Respecto a O: sabemosque simétrico de [EF] =[RS]. Si 2 segmentos simétricos respecto a un punto son isométricos, entonces EF = RS *(5)*.

Comparando las igualdades *(4) y (5)*, deducimos que AB = RS.

8) Respecto a D: simétrico F = B y simétrico O = O. Por tanto, simétrico [FO] = [BO]. Así pues, según la regla anterior, FO = BO *(6)*.

Respecto a O: simétrico F = S y simétrico O = O. Por tanto, simétrico [FO] = [SO]. Así pues, FO = SO *(7)*.

Comparando las igualdades *(6)* y *(7)*, deducimos que OB = OS; por tanto, O es equidistante de B y de S.

Si un punto es equidistante de 2 extremos de un segmento, entonces pertenece a la mediatriz de este segmento; por tanto, O es un punto de la mediatriz de [BS].